Varianta 18

Subiectul I.

a) $\left|(3+4i)^4\right| = 625$

b) 0.

c) $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$.

d) $AB = \sqrt{2}$.

e) $S_{ABC} = \frac{3}{2}$.

f) $a = -7$ şi $b = 24$

Subiectul II.

1.

a) $a_4 = 24$.

b) Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$.

c) $g(1) = 0$.

d) $x \in \{-1, 1\}$.

e) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

2.

a) $f'(x) = 0$. Se deduce că funcția f este constantă pe $\mathbf{R}$.

Mai mult, deoarece $f(1) = \frac{\pi}{2}$, rezultă $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

c) Asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției este dreapta de ecuație $y = \frac{\pi}{2}$.

d) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 0$.

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Subiectul III.

a) $\det(A) = 1 \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$.

b) $f(O_2) = O_2$, $f(I_2) = O_2$.

c) Calcul direct.

d) Calcul direct.

e) $B=\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, cu $B_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ este o bază.

f) Deoarece $f(O_2)=f(I_2)$, funcția f nu este injectivă.

Dacă $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$, atunci suma elementelor de pe diagonala principală a lui $f(X)$ este 0, deci $\forall\, X\in M_2(\mathbf{R})$, $f(X)\neq I_2$, adică f nu este surjectivă.

g) Dacă $X, Y\in M_2(\mathbf{R})$, din **d)** avem: $f(X)+f(Y)=f(X+Y)\overset{f)}{\neq} I_2$.

Subiectul IV.

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Punând $a=-\sqrt[4]{x}$ în egalitatea de la **a)** se obține concluzia.

c) Pentru $n\in\mathbf{N}^*$ şi $x\in[0,1]$, avem $1+\sqrt[4]{x}\geq 1 \iff 0<\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\leq 1$

şi înmulțind ultima inegalitate cu $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}\geq 0$ obținem $0\leq\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}}\leq\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}$.

d) Pentru $b\in[0,1]$, integrând pe intervalul $[0,b]$ inegalitatea de la **c)** şi folosind faptul că avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b^{\frac{n+1}{4}+1}}{\frac{n+1}{4}+1}=0$, deducem $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^b\frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx=0$.

e) Făcând schimbarea de variabilă $1+\sqrt[4]{x}=y>0$, se calculează mai întâi o primitivă a funcției f pe intervalul $(0,b]$ şi apoi se prelungeşte prin continuitate la $[0,b]$.
Obținem că o primitivă pe $[0,b]$ a funcției f este:

$$F(x)=\begin{cases}4\cdot\left(\dfrac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}{3}-3\dfrac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)-\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\right), & x\in(0,b]\\[2ex] \dfrac{22}{3}, & x=0\end{cases}$$

Folosind teorema Leibniz-Newton, obținem:

$$\int_0^b\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx=F(b)-F(0)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{b^3}-2\sqrt{b}+4\sqrt[4]{b}-4\cdot\ln\left(1+\sqrt[4]{b}\right).$$

f) Din **b)** avem

$$\frac{1}{1+\sqrt[4]{t}}=1-\sqrt[4]{t}+\left(\sqrt[4]{t}\right)^2+\ldots+(-1)^n\left(\sqrt[4]{t}\right)^n+(-1)^{n+1}\frac{\left(\sqrt[4]{t}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[4]{t}}\ ,\quad \forall\, t\in[0,1],\ \forall\, n\in\mathbf{N}.$$

Pentru $x\in[0,1]$, integrând pe intervalul $[0,x]$ această egalitate, se obține

$$x+\frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+\frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{4}+1}}{\frac{2}{4}+1}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{\frac{n}{4}+1}}{\frac{n}{4}+1}+(-1)^{n+1}\cdot\int_0^x \frac{\left(\sqrt[4]{t}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[4]{t}}\,dt=\int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[4]{t}}\,dt \qquad (2)$$

Din **d)** obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\cdot\int_0^b \frac{\left(\sqrt[4]{x}\right)^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx=0$.

Trecând la limită în (2) obținem concluzia.

g) Concluzia subpunctului înseamnă că există $x\in(0,1)$ astfel încât $g(x)=\int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[4]{t}}\,dt\in\mathbf{Q}$.

Deoarece funcția g are proprietatea lui Darboux pe $(0,1)$, afirmația anterioară este evidentă.